

Exercice 1 : (8,5 points)

On considère les polynômes $P(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ et $Q(x) = 2x^3 - 9x^2 + 10x - 3$.

1. a. Déterminer toutes les racines du polynôme P.
b. En déduire une factorisation de P en produit de quatre polynômes du premier degré.
2. a. Vérifier que 1 est une racine de Q.
b. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $Q(x) = 0$.
3. a. Déterminer les racines communes de P et Q.
b. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $P(x) \leq 5.Q(x)$.
4. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $[P(x)]^2 - 25[Q(x)]^2 = 0$.

Exercice 2 : (11,5 points)

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a. On désigne par G le centre du cercle (\mathcal{C}) circonscrit au triangle ABC et par I le milieu du segment [AC].

1. a. Faire une figure.
b. On pose $B' = t_{\overline{AG}}(B)$ et $C' = t_{\overline{AG}}(C)$. Construire les points B' et C'.
c. Prouver que BCC'B' est un rectangle dont on précisera l'aire en fonction de a.
On note G' le milieu du segment [BC'].
2. a. Déterminer $t_{\overline{AG}}((BG))$ et $t_{\overline{AG}}((CG))$.
b. En déduire $t_{\overline{AG}}(G)$.
3. a. Construire le cercle (\mathcal{C}') image du cercle (\mathcal{C}) par la translation de vecteur \overline{AG} .
b. Prouver que (\mathcal{C}') est le cercle circonscrit au rectangle BCC'B'.
4. a. Les droites (CB') et (C'G) se coupent en J. Montrer que $t_{\overline{AG}}(I) = J$
b. En déduire que J est le barycentre des points pondérés (B', -1) et (G', 3) et que $J = G' * C$.
5. La droite (BG) recoupe le cercle (\mathcal{C}) en E. Montrer que $t_{\overline{AG}}(E) = C$.